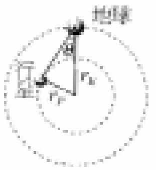
7-1 克卜勒的行星運動三定律

1. 地球(E)與某行星均繞太陽(S)作近似圓形軌道運行，由地球上觀測，發現該行星與太陽可能呈現的最大視角為 θ，如圖 1 所示，其值之正弦值 $\sin\theta$ 約 18/25，據此推求 (a)該行星運行的軌道半徑 r_P 與地球運行軌道半徑 r_E 之比值為何？(b)地球公轉週期為 1 年，以此為單位，估計該行星之運行週期為若干？



答：如右圖示，在最大視角θ時地球與行星之連線與行星軌道相切，又查表知 $r_E=1.496\times10^{11}$m，則

(a)由圖知 $r_P=r_E\sin\theta$ 知 $\sin\theta=r_P/r_E=\frac{18}{25}$

此行星應為金星

(b)由克卜勒第三定律知$\frac{T_E^2}{T_P^2}=\frac{r_E^3}{r_P^3}$得$\frac{1^2}{T_P^2}=(\frac{25}{18})^3$

故行星運行週期 $T_P=0.64$（年）

2. 已知某行星繞太陽運行，軌道為圓形，半徑為 r，在單位時間內半徑掃過的面積為 A，如圖 2。則其繞太陽公轉之瞬時速率為若干？

答：設瞬時速率為 v，且由克卜勒第二定律知 $A=\frac{1}{2}rv$

即 $v=\frac{2A}{r}$

3. 某彗星以橢圓軌道繞太陽公轉，其與太陽之最遠距離為其與太陽最近距離之 100 倍。今測得此彗星在最接近太陽時之速率為 1000 公里／秒，其在最遠離太陽時之速率為何？

答：依克卜勒第二定律知

$r_1v_1=r_2v_2$

得 $100v_1=1\times1000$

得$v_1=10$ 公里／秒。

4. 已知土星繞太陽運轉之平均距離約為地球繞太陽運轉平均距離的 10 倍，則土星繞太陽一周需時多少年？

答：由克卜勒第三定律知

$\frac{10^3}{T^2}=\frac{1^3}{1^2}$得 $T=10\sqrt{10}$年。

7-2 萬有引力定律

5. 某星球其平均密度與地球相同，半徑則為地球的兩倍，在地球上重量為 64 公斤的人到該星球上時，其重量為多少公斤重？

答：星球表面的重力加速度

$$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{G\times\frac{4}{3}\pi R^3D}{R^2}=\frac{4}{3}\pi GDR\ (D\text{ 表密度})$$

當密度相同時，則 $g\propto R$，故本題答案為 2×64=128 公斤重。

二、進階題

7-1 克卜勒的行星運動三定律

1. 一衛星環繞一行星做橢圓軌道之運動，設此衛星至行星最遠距離與最近距離之比為 2：1，如圖 3，則相應的角速度之比為多少？

答：$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}r^2\omega=$定值，故$\omega$與 r^2 成反比

故 $\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{1^2}{2^2}=\frac{1}{4}$

2. 地球的兩個人造衛星 A、B，質量比為 1：2，軌道半徑比為 2：1，回答下列問題 (a) 角速度的比為何？ (b) 向心加速度量值的比為何？ (c) 軌道速率的比為何？ (d) 角動量量值比為何？ (e)單位時間內，人造衛星與地球連線掃過面積的比為何？

答：(a) 依克卜勒行星運動第三定律知$(\frac{T_A}{T_B})^2=(\frac{R_A}{R_B})^3$

$\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{(\frac{2}{1})^3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

角速度$\omega=\frac{2\pi}{T}$

故 $\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{T_B}{T_A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(b) 向心加速度 $a_c=\frac{GM}{R^2}\propto\frac{1}{R^2}$

故 $\frac{a_A}{a_B}=\frac{1}{4}$

(c) 軌道速率 $v=\sqrt{\frac{GM}{R}}\propto\frac{1}{\sqrt{R}}$，故

$\frac{v_A}{v_B}=\frac{\sqrt{R_B}}{\sqrt{R_A}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(d) 角動量 $L=Rmv$

$\frac{L_A}{L_B}=\frac{2\times1\times1}{1\times2\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) 面積速率比$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}R^2\omega=\frac{1}{2}Rv\propto Rv$，故比值為

$\frac{2\times1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$

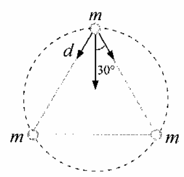
3. 已知某行星繞太陽作橢圓軌道運行，其與太陽連線，在單位時間內掃過的面積速度為 A，當此行星距離太陽 R 時，相對於太陽的角速度為何？

答：由克卜勒行星運動定律知$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}R^2\omega=$定值，得 $A=\frac{1}{2}R^2\omega$，即

$\omega=\frac{2A}{R^2}$

7-2 萬有引力定律

4. 質量為 M 完全相同的三個星球，位於邊長為 d 的等邊三角形頂點，若星球受相互間的重力影響，繞其共同質心在外接三角形的圓軌道上運動，如圖 4，三個星球的連線距離保持不變，而仍保持等邊三角形，試求此系統中每一星球的速率應為若干？週期又為何？



答：三個星球在同一軌道上運轉，設半徑為r，則$r=\frac{d}{\sqrt{3}}$

向心力 $F=2\cdot\frac{GM^2}{d^2}\cdot\cos30°=\frac{\sqrt{3}GM^2}{d^2}$

(1) $F=\frac{\sqrt{3}GM^2}{d^2}=M\cdot\frac{v^2}{r}$得 $v=\sqrt{\frac{GM}{d}}$

(2) $\frac{\sqrt{3}GM^2}{d^2}=M\frac{4\pi^2r}{T^2}=M\frac{4\pi^2}{T^2}\times\frac{d}{\sqrt{3}}$

$T=2\pi\sqrt{\frac{d^3}{3GM}}$

5. (a)設一行星的平均密度為ρ，一衛星剛好在其表面附近繞此行星轉動，其週期為 T，試證明ρT^2為一定值。

(b)設此行星為地球，一衛星繞地球表面運轉，週期為 84 分鐘，計算此定值。

答：(a) 設人造衛星質量 m，軌道半徑 R（即行星之半徑），行星質量 M

$M=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho$，$F=\frac{GMm}{R^2}$，又$F=m\frac{4\pi^2R}{T^2}$

因為

$\frac{GMm}{R^2}=\frac{m\cdot4\pi^2R}{T^2}$

所以

$GT^2M=4\pi^2R^3$

即

$GT^2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\rho=4\pi^2R^3$

所以

$\rho T^2=\frac{3\pi}{G}=$常數

(b) $\rho T^2=\frac{3\pi}{G}=\frac{3\times3.14}{6.67\times10^{-11}}=1.41\times10^{11}$ 公斤-秒²／公尺³

三、綜合題

1. 考慮一質量 M 的物體與雙質點組（質量均為 m）間之萬有引力作用，如圖 5，已知雙質點組系統的質心距 M 為 R，則 (a)雙質點組系統與 M 之間的萬有引力為何？ (b)當 $d\ll R$ 時，雙質點組與 M 之間的萬有引力為何？

答：(a) M 受力

$$F=\frac{GMm}{(R-d)^2}+\frac{GMm}{(R+d)^2}=\frac{2GmM(R^2+d^2)}{(R^2-d^2)^2}$$

(b)當 $d\ll R$ 時，$R^2\pm d^2\doteqdot R^2$代入上式得 $F\doteqdot\frac{2GmM}{R^2}$。

2. 半徑為 R 的一行星，旁有一質量為 m 的衛星繞其運轉，如圖 6，軌道半徑為 r，週期為 T，萬有引力常數為 G，回答下列問題 (a) 此行星的質量為多少？ (b) 衛星運轉時的向心加速度為多少？ (c) 衛星所受行星的引力為多少？ (d) 行星表面的重力加速度為多少？ (e) 行星的密度為多少？

答：設行星的質量為 M

(a) $\frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2r}{T^2}$ 得 $M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$

(b) 向心力加速度即$\frac{4\pi^2r}{T^2}$

(c) 衛星受行星的引力為 $ma=m\cdot\frac{4\pi^2r}{T^2}=\frac{4\pi^2rm}{T^2}$

(d) 行星表面的重力加速度 $g=\frac{GM}{R^2}=\frac{4\pi^2r^3}{R^2T^2}$

(e) 設行星密度 D，則 $\frac{4}{3}\pi R^3D=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$

故 $D=\frac{3\pi r^3}{GT^2R^3}$

一、基本題

8-1　功、動能與功-能定理

1. 如圖 1 所示，有一顆球以甲、乙、丙三種不同的方式，由同一高度處拋出
甲：將球自由釋放，
乙：將球以速度 v 鉛直上拋，
丙：將球以速度 v 水平拋出，
若不計所有阻力，則
(a)球以哪一種方式出發時動能最大？
(b)球以哪一種方式出發，落地時的總力學能最大？

答：(a)動能由 $\frac{1}{2}mv^2$ 決定，故知乙、丙方式出發時的動能最大。
(b)以地球與此球為系統時，三種方式的重力位能都一樣，但乙、丙的初動能較大，因此乙、丙落地時的總力學能最大。

2. 在光滑的水平面上有重量比為 2：1 的甲、乙兩個靜止物體，今施以相同大小的水平力，使其沿著不同方向移動相同距離，如圖 2 所示，則
(a)水平力對兩物體所做的功是否相同？
(b)兩物體的末動能是否相同？如果不同，何者較大？
(c)承上題，兩物體的末速何者較大？

答：(a)由功的定義 $W=\vec{F}\cdot\vec{d}$ 知：兩物的移動方向雖然不同，但外力對物體所做的功卻是相同的。
(b)由於外力對物體所做的功相同，由功-能定理 $W=\Delta K$ 知：兩物體的末動能也相同。
(c)由動能 $K=\frac{1}{2}mv^2$ 知，動能相同時，質量較小的物體，其速率較大。

3. 一物體質量為 5 公斤，靜止在一光滑水平面上。今施以 50 牛頓的外力，以仰角 45° 拉之，如圖 3 所示，則經 4 秒鐘後，外力對此物體做功為多少焦耳？

答：50 牛頓之垂直分力

$F_{\perp}=50\times\sin45°=25\sqrt{2}$ 牛頓

$25\sqrt{2}$ 牛頓無法抬起物體，故物體仍平貼於地面。

物體在水平方向的位移

$$d=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times(\frac{F\cos45°}{m})\,t^2$$
$$=\frac{1}{2}\times(\frac{50\times\cos45°}{5})\times4^2=40\sqrt{2}\text{ 公尺}$$

外力所做功為

$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=50\times40\sqrt{2}\times\cos45°=2000$ 焦耳

4. 一彈簧原長 20 公分，若施以 20 牛頓的力，可伸長至 25 公分。今將彈簧的一端固定，另一端則施力將彈簧的長度由 15 公分，緩慢地壓縮為 10 公分，則此過程中外力所做的功為多少焦耳？

答：由虎克定律 $F=k\Delta x$ 知

$20=k\times(0.25-0.2)$

得　$k=400$ 牛頓／公尺

彈簧的長度為 15 公分時的彈性位能

$U_1=\frac{1}{2}k\times x_1^2=\frac{1}{2}\times400\times(0.2-0.15)^2=0.5$ 焦耳

彈簧的長度被壓縮為 10 公分時，其具有的彈性位能為

$U_2=\frac{1}{2}kx_2^2=\frac{1}{2}\times400\times(0.2-0.1)^2=2$ 焦耳

故外力做功即為彈性位能的變化，即

$W=\Delta U=2-0.5=1.5$ 焦耳

5. 一物體質量為 m，其原來的動能為 K，由於受外力的作用，外力方向與原速度方向相同，其速率增加了 Δv，則外力對此物體所做之功為何？

答：設物體的初速為 v_0，則 $K=\frac{1}{2}mv_0^2$。由功-能定理知，末動能與初動能的差值即為外力對此物體所做的功，故

$$W=\frac{1}{2}m(v_0+\Delta v)^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

因此

$$W=mv_0\Delta v+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$$

或

$$W=\sqrt{2mK}\Delta v+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$$

【注意】動能由速率決定。

〈補充習題〉

6. 甲、乙兩粒質量相同的小石子，自同一高度以水平方向的初速拋出，落在平坦的地面上。已知甲的初速為乙的 2 倍。若不計空氣阻力，則
(a)何者下落的加速度較大？　(b)何者飛行時間較大？　(c)何者水平射程較大？
(d)何者落地動能較大？　(e)何者落地時，其速度的鉛直分量較大?
[改自 91 指定科目]

$$W=\frac{1}{2}m(v_0+\Delta v)^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

因此

$$W=mv_0\Delta v+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$$

或

$$W=\sqrt{2mK}\Delta v+\frac{1}{2}m(\Delta v)^2$$

【注意】動能由速率決定。

〈補充習題〉

6. 甲、乙兩粒質量相同的小石子，自同一高度以水平方向的初速拋出，落在平坦的地面上。已知甲的初速為乙的 2 倍。若不計空氣阻力，則
(a)何者下落的加速度較大？　(b)何者飛行時間較大？　(c)何者水平射程較大？
(d)何者落地動能較大？　(e)何者落地時，其速度的鉛直分量較大?
[改自 91 指定科目]

最小速率的 $\frac{6}{5}$ 倍。設重力加速度為 g，此小球的最小速率為何？[80 大學聯招]

答：令小球的最小速率為 v，則由力學能守恆定律與已知條件得

$$\frac{1}{2}m(\frac{6}{5}v)^2=\frac{1}{2}mv^2+mg\times2R$$

因此　$v=\sqrt{\frac{100gR}{11}}$

10. 如圖 4 中，設平面 AB 與曲面 BCD 均光滑，若欲使自 A 水平射出的小物體，經 B、C、D 各點後直接落回 A 點。則
(a)物體由 D 處飛出的速度量值應為若干？
(b)物體在 D 處的重力位能比在 A 處高出多少？
(c)物體由 A 處射出的初速度量值應為若干？

答：(a)物體由 D 處落到 A 處的過程，做水平拋射運動，設其飛行時間為 t，離開 D 處的水平速度為 v_D，則飛行時間為

$$t=\sqrt{\frac{2\times2r}{g}}=2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

而水平射程為

$$3r=v_Dt=2v_D\sqrt{\frac{r}{g}}$$

得　$v_D=\frac{3}{2}\sqrt{gr}$。

(b)$U_D-U_A=mgh=2mgr$

(c)令物體由 A 處出發的初速為 v_A，則由力學能守恆定律知

$$v_A^2=v_D^2+2g\times2r=(\frac{3}{2}\sqrt{gr})^2+4gr$$

得　$v_A=\frac{5}{2}\sqrt{gr}$。

11. 一人造衛星質量為 m，以橢圓軌道繞地球運行；衛星離地球中心最近的距離為 R，離地心最遠的距離為 $3R$，如圖 5 所示。設地球之質量為 M，重力常數為 G，試求
(a)衛星在離地心最近和最遠處之動能比。
(b)衛星在離地心最近和最遠處之動能差。　[86 大學聯招]

答：(a)設 v_1、v_2 分別代表衛星在近地點與遠地點處的速率，則由克卜勒行星運動第二定律（等面積定律）知

$Rv_1=3Rv_2$

故 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{3}{1}$，又由動能 $K=\frac{1}{2}mv^2$ 的關係知：動能與速率平方成正比，故衛星在近地點與遠地點處的動能比為 9：1。

(b)以衛星與地球為系統時，設 K_1、K_2 分別為衛星在近地點與遠地點處的動能，則由力學能守恆定律知

$$\frac{-GMm}{R}+K_1=\frac{-GMm}{3R}+K_2$$

故近地點與遠地點的動能差為

$$K_1-K_2=\frac{GMm}{R}-\frac{GMm}{3R}=\frac{2GMm}{3R}$$

12. 設有二星球其質量均為 m，在相互吸引之重力作用下同時以半徑 r 對此二星球之質量中心作圓周運動，如圖 6 所示，則至少需多少能量，才能將此二星球拆散成相距無限遠（G 為重力常數）？　[84 大學聯招]

答：令雙星繞系統質心運動的速率為 v，則由重力等於向心力的關係知

$$G\frac{m^2}{(2r)^2}=m\frac{v^2}{r}$$

得　$v=\sqrt{\frac{Gm}{4r}}$

而星球的動能則為

$$K=\frac{1}{2}mv^2=G\frac{m^2}{8r}$$

雙星系統的重力位能為

$$U=-G\frac{m^2}{2r}$$

故雙星系統此時的總力學能為

$$E = 2K + U = \frac{Gm^2}{4r} + (\frac{-Gm^2}{2r}) = -\frac{Gm^2}{4r}$$

當雙星分離至無窮遠處時，當時的力學能 $E' = 0$。

令分離兩星球所需的最小功為 W，則由能量守恆定律知

$$W = E' - E = 0 - (-\frac{Gm^2}{4r}) = \frac{Gm^2}{4r}$$

13. 如圖 7 所示，在水平地面上有一滑車，質量為 M，滑車上有一弧形軌道，高度為 H，軌道底端成水平。有一質量為 m 的物體，從軌道頂端沿著軌道自由下滑。設摩擦力均不計，則當物體 m 滑離軌道底端之瞬間，滑車的速度量值為何？ [80 大學聯招]

答： 以物體與弧形軌道為系統，此系統在水平方向無外力作用，因此水平方向的總動量為零。令 v、V 分別為 m 和 M 分開時的瞬時速度，則由水平方向動量守恆知

$$mv = MV$$

又由力學能守恆定律知

$$\frac{1}{2}m(\frac{MV}{m})^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgH$$

聯立兩式，得

$$V = m\sqrt{\frac{2gH}{M(M+m)}}$$

二、進階題

8-2　位能與力學能守恆

1. 一質量為 m 的質點，以一細繩繫住而作半徑為 R 的鉛直圓周運動，如圖 8 所示。已知在最高點的速率為 $\sqrt{\frac{6}{5}Rg}$，g 為重力加速度，回答下列問題

(a)此質點的最大速率為若干？

(b)在最高點處，繩子對質點作用力的量值為質點重量的多少倍？

答： (a)由力學能守恆知：最低點的重力位能最小，其動能最大，故最大速率發生於最低點處，令其值為 v。今以最低處為重力位能的零點，則由力學能守恆定律知

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{\frac{6}{5}Rg})^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}mv^2$$

得 $v = \sqrt{\frac{26}{5}Rg}$

故最大速率為 $\sqrt{\frac{26}{5}Rg}$。

(b)設繩子對質點的作用力為 F，今質點通過最高點處時，當時的向心力等於質點重力與繩子的張力之合，亦即

$$mg + F = \frac{m(\sqrt{\frac{6}{5}Rg})^2}{R}$$

得 $F = \frac{1}{5}mg$。

2. 一小球被擲向光滑之地面後反彈跳起。在碰撞發生前後，其入射速度及反彈速度分別與鉛垂線成夾角 θ_1 及 θ_2（如圖 9 所示）。若反彈過程為非彈性碰撞，小球剛反跳時的動能降為碰撞前瞬間動能的 $\frac{1}{C}$ 倍，其中 $C > 1$，則 $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$ 之值為何？ [85 大學聯招]

答： 令小球的入射速率為 v_1，反彈速率為 v_2。今因地面光滑，故小球碰撞前後的水平動量保持守恆，亦即

$$mv_1\sin\theta_1 = mv_2\sin\theta_2$$

又依題意知

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{C}\times(\frac{1}{2}mv_1^2)$$

聯立二式，得

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{C}$$

3. 一擺長為 R 的單擺懸於牆上 O 點。在 O 點的正下方距離 H 處 $(H < R)$ 有一水平細桿 O'，細桿垂直進入牆面。今拉擺錘至擺線呈水平後放開（如圖 10 所示），若要擺錘在細桿擋住擺線後，仍能繞細桿作完整的圓周運動，則 $\frac{H}{R}$ 的最小比值應為多少？ [88 大學聯招]

答： 先考慮擺錘以半徑 r 作鉛直面圓周運動所需滿足的速率條件。當擺錘作圓周運動時，位置愈高則速率愈小，且繩子張力也變小，考慮最高點處的向心力時，若擺錘於此處的速率為 v，則

$$\frac{mv^2}{r} = mg + T，T：表示繩子張力$$

顯然地，當張力 T 為零時，最高點的速率為最小值，其值為

$$V_{min} = \sqrt{gr}$$

利用力學能守恆定律，可知擺錘欲完成此圓周運動，其在最低處的最小速率 u 為

$$u^2 = V_{min}^2 + 2g\times2r$$

或 $u = \sqrt{5gr}$

今擺錘由靜止狀態釋放後，若通過最低點後，可作半徑 r 的鉛直面圓周運動時，則

$$\sqrt{2gR} \geq u = \sqrt{5gr} = \sqrt{5g(R-H)}$$

得 $\frac{H}{R} \geq \frac{3}{5}$

三、綜合題

1. 在完成登月任務後，登月艇自月球表面升空與母船會合。母船與登月艇會合後一起繞月球作圓周運動，其速率為 v。母船與登月艇的質量均為 m，月球的質量為 M，重力常數為 G。

(a)求母船與登月艇繞月球軌道運動的軌道半徑和週期。

(b)若在啟動歸程時，船上火箭作一短時間的噴射（噴出廢氣的質量及動量均可忽略），使登月艇與母船分離，且分離後，登月艇與母船同向運動。若分離後母船恰能完全脫離月球的引力，求剛分離後登月艇的速率，及母船與登月艇在火箭噴射的過程中，共獲得的力學能。 [88 大學聯招]

答： (a)母船與登月艇一起繞月球作圓周運動的半徑為 R，週期為 T，則由向心力等於月球引力的關係知

$$\frac{G(2m)M}{R^2} = \frac{2mv^2}{R}，M：月球質量$$

得 $R = \frac{GM}{v^2}$

週期 $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v}(\frac{GM}{v^2}) = \frac{2\pi GM}{v^3}$

故軌道半徑為 $\frac{GM}{v^2}$，週期為 $\frac{2\pi GM}{v^3}$。

(b)設母船的脫離速率為 v_e，由力學能守恆定律知

$$\frac{-GMm}{R} + \frac{1}{2}mv_e^2 = 0$$

得 $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v$

令登月艇與母船分離後的速率為 v，則由動量守恆定律知

$$(m + m)v = m_e v_e + mv'$$

得 $v' = (2-\sqrt{2})v$

因此母船與登月艇在火箭噴射的過程中，共獲得力學能 ΔE 為

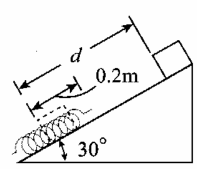
$$\Delta E = (\frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}mv'^2) - \frac{1}{2}(2m)v^2 = (3-2\sqrt{2})mv^2$$

2. 一條力常數為 98 牛頓／公尺、原長 2 公尺的輕質彈簧，置於傾斜角為 30° 的光滑斜面的底部，如圖 11 所示。若有一質量為 40 公克之靜止木塊自斜面頂開始自由下滑，可使彈簧產生的最大壓縮量為 20 公分。

(a)試問木塊在到達最低點（當時速率為零）時，在斜面上已經滑行的距離為多少？

(b)木塊初次接觸彈簧時的速率為何？

答： (a)設木塊在到達最低點時，已在斜面上滑行的距離為 d，由於當時彈簧的壓縮量 $x = 0.2$ 公尺，則由力學能守恆定律知



$$mgd\sin30° = \frac{1}{2}kx^2$$

得

$$d = \frac{kx^2}{2mg\sin30°} = \frac{98\times0.2^2}{2\times0.04\times9.8\times\frac{1}{2}} = 10 公尺$$

(b)令木塊初次接觸彈簧的速率為 v，當時木塊已經下滑的距離為

$$d - 0.2 = 10 - 0.2 = 9.8 公尺$$

故由力學能守恆定律知：損失的重力位能等於增加的動能，亦即

$$mg\times 9.8\times \sin 30° = \frac{1}{2}mv^2$$

得　$v = 9.8$ 公尺／秒

〈補充習題〉

3. 一彈簧置於水平光滑平面上，一端固定另一端連結木塊作簡諧運動。當木塊離平衡點的位移為最大位移的$\frac{2}{3}$時，其動能為最大動能的幾倍？　[83 日大]

答：設 v_{max} 為木塊作簡諧運動的最大速率，而 v 為木塊離平衡點的位移為最大位移的$\frac{2}{3}$時之速率，k 為彈簧的力常數，R 為木塊離平衡點的最大位移，則由力學能守恆定律知

$$E=\frac{1}{2}kR^2=\frac{1}{2}mv^2_{max}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{2}{3}R\right)^2$$

得　$\frac{1}{2}mv^2=\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}kR^2=\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}mv^2_{max}$

故　$\dfrac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2_{max}}=\frac{5}{9}$。

4. 如圖 12a所示，在無摩擦水平地面上，有一彈簧－物體系統，彈簧之力常數為 k，物體 m 離開平衡位置之位移以 x 表示。若物體受到如圖 12b之水平施力 F 與彈簧力 $-kx$ 作用，由平衡位置移動至 $x = 1.00$ 公尺處，則

(a)施力F做功為何？

(b)彈簧力做功為何？

(c)物體的動能變化量為何？　[改自 91 指定科目]

答：(a)兩力做功由力與位置圖形面積計算（$F > 0$ 的面積取正、$F < 0$ 的面積取負），故拉力 F 做功為$W_F = 0.5$ 焦耳。

(b)彈簧力做功為 $W_{F'} = -0.25$ 焦耳。

(c)由功－能定理知，物體動能增加量 $\Delta K = W_F + W_{F'} = 0.25$ 焦耳。